

Analiza zespolona
Lista 9

Zad 1. Wyznaczyć residua w skończonych punktach osobliwych izolowanych następujących funkcji:

$$a) f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)}, \quad b) f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z-1)(z+1)}, \quad c) f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2(z+1)}.$$

Zad 2. Określić rodzaj osobliwości w skończonych punktach osobliwych oraz w nieskończoności następujących funkcji:

$$a) f(x) = \frac{1}{z - z^3}, \quad b) f(x) = \frac{z^5}{(1-z)^2}, \quad c) f(x) = \frac{e^z}{1+z^2}, \quad d) f(x) = \frac{1-e^z}{1+e^z}.$$

Zad 3. Podać przykład funkcji, dla której $2+i$ jest biegunem rzędu czwartego, -1 jest punktem istotnie osobliwym i ∞ jest biegunem pojedynczym.

Zad 4. Obliczyć residua we wszystkich izolowanych (skończonych lub nie) punktach osobliwych funkcji z Zadania 2.

Zad 5. Obliczyć za pomocą residuów całki z Zadania 5 na liście 7

Zad 6. Obliczyć całki:

$$a) \int_{|z-3|<15} \frac{z^2+1}{z-2} dz,$$

$$b) \int_{C(-2006i, 2006)} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} dz.$$

$$c) \int_{\Gamma} \frac{\sin^3(z-i)}{(z-i)^3} dz, \text{ gdzie } \Gamma \text{ jest łamaną zamkniętą łączą punkty } -1, 2i, 1,$$

$$d) \int_{C(0,r)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)}, \text{ gdzie } |a| < |b| \text{ i } r \neq |a|, |b|,$$

$$e) \int_{\Gamma} \frac{dz}{1+z^2}, \text{ gdzie } \Gamma \text{ jest elipsą } x^2 + 4y^2 = 16,$$

$$f) \int_{\Gamma} \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)} \sin z dz, \text{ gdzie } \Gamma \text{ jest okręgiem } C(1+i, \sqrt{2}),$$

$$g) \int_{\Gamma} \frac{1}{1-z^8} dz, \text{ gdzie } \Gamma \text{ jest łamaną zamkniętą łączą punkty } 2, 2i, -2, -2i,$$

$$h) \int_{C(1,2)} z^2 e^{-\frac{1}{z}} dz,$$

$$i) \int_{C(0,1)} \sin\left(\frac{2}{z}\right) dz.$$